Proposé et Encadré par :

Miguel Couceiro

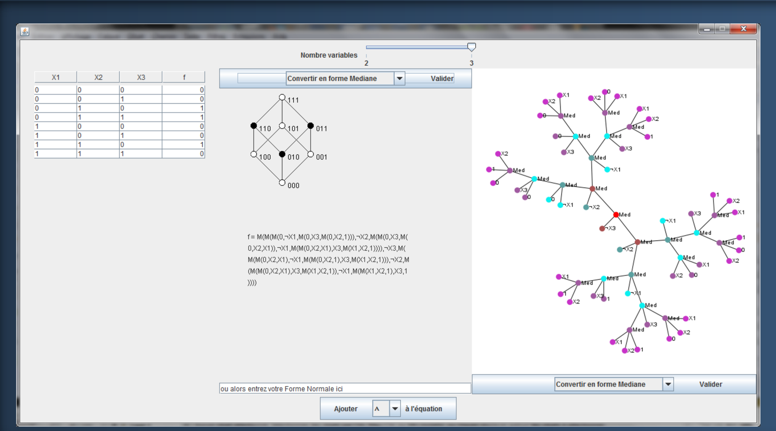
M1 Sciences Cognitives

LENTSCHAT Martin
MERCURIALI Pierre
TIV Stéphane

Etude de Formes Normales en Logique Booléene

Ce projet s'inscrit dans le cadre de la logique propositionnelle et de la theorie des fonctions booléennes.

Plus précisément, dans la recherche d'une meilleure compréhension des fonctions booléennes et de leurs représentations, par l'etude de l'efficacité et de la complexité de celles-ci.



Programme de conversion.

La Forme Médiane

Toute fonction booléenne peut aussi s'écrire sous la forme normal médiane.

Le connecteur médiane M est une fonction à 3 entrées dans {0,1}, où la valeur de sortie correspond à 0 lorsqu'au moins 2 des arguments sont à 0, et à 1 lorsqu'au moins 2 des arguments sont à 1.

Exemple : $M(X_1, X_2, 0) = 1$ pour $X_1 = 1$ et $X_2 = 1$

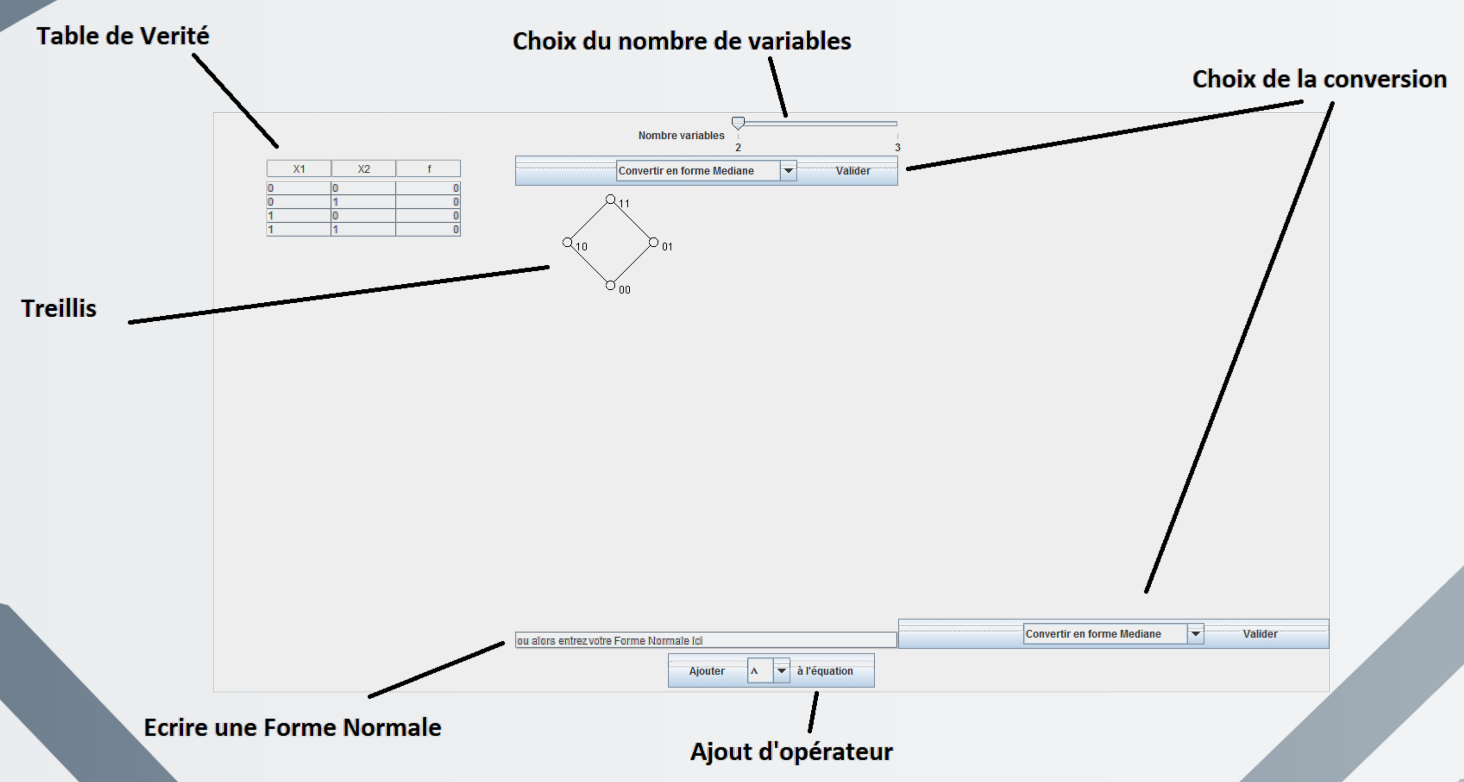
Equivalence avec une fonction boolénne :
Soit f la fonction boolénne représentée par la table de vérité suivante :

x_1	x_2	g
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La formule sous forme médiane est la suivante :

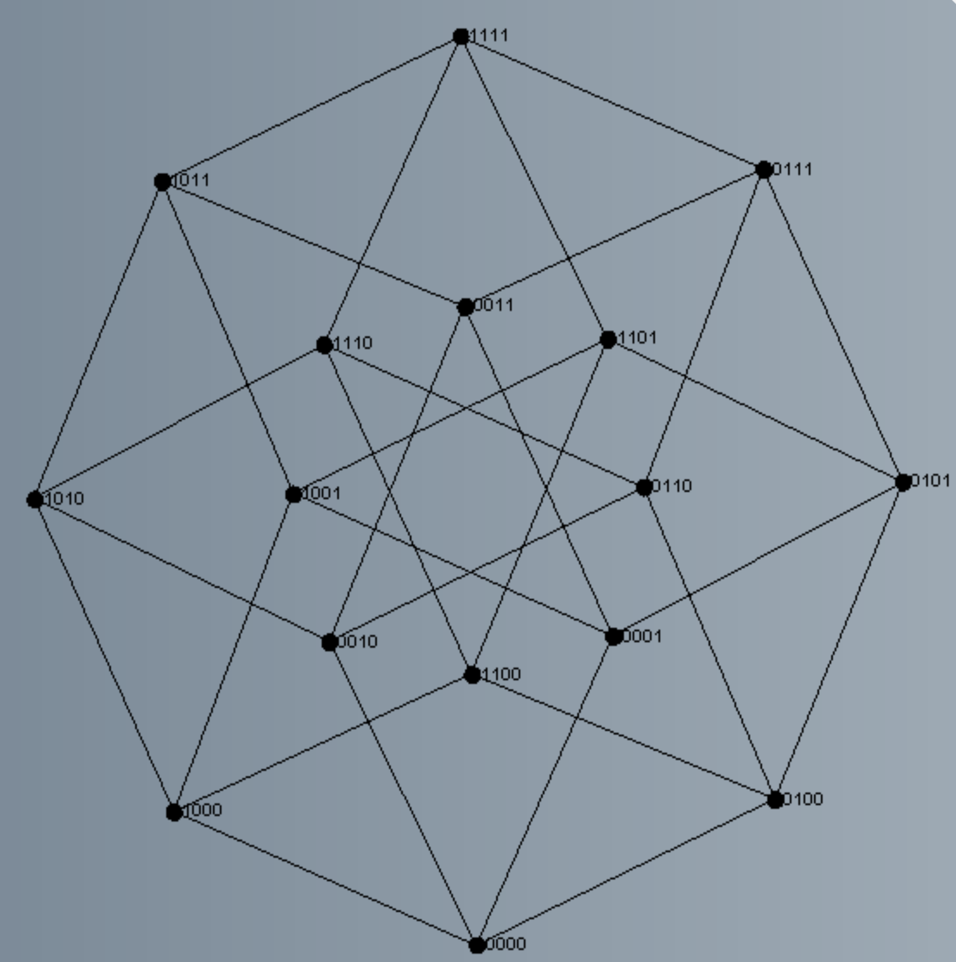
$$f(X_1, X_2) = M(M(M(0, \bar{X}_1, \bar{X}_2), X_2, \bar{X}_1), X_1, M(M(0, \bar{X}_1, \bar{X}_2))$$

Divers Fonctionnalités :

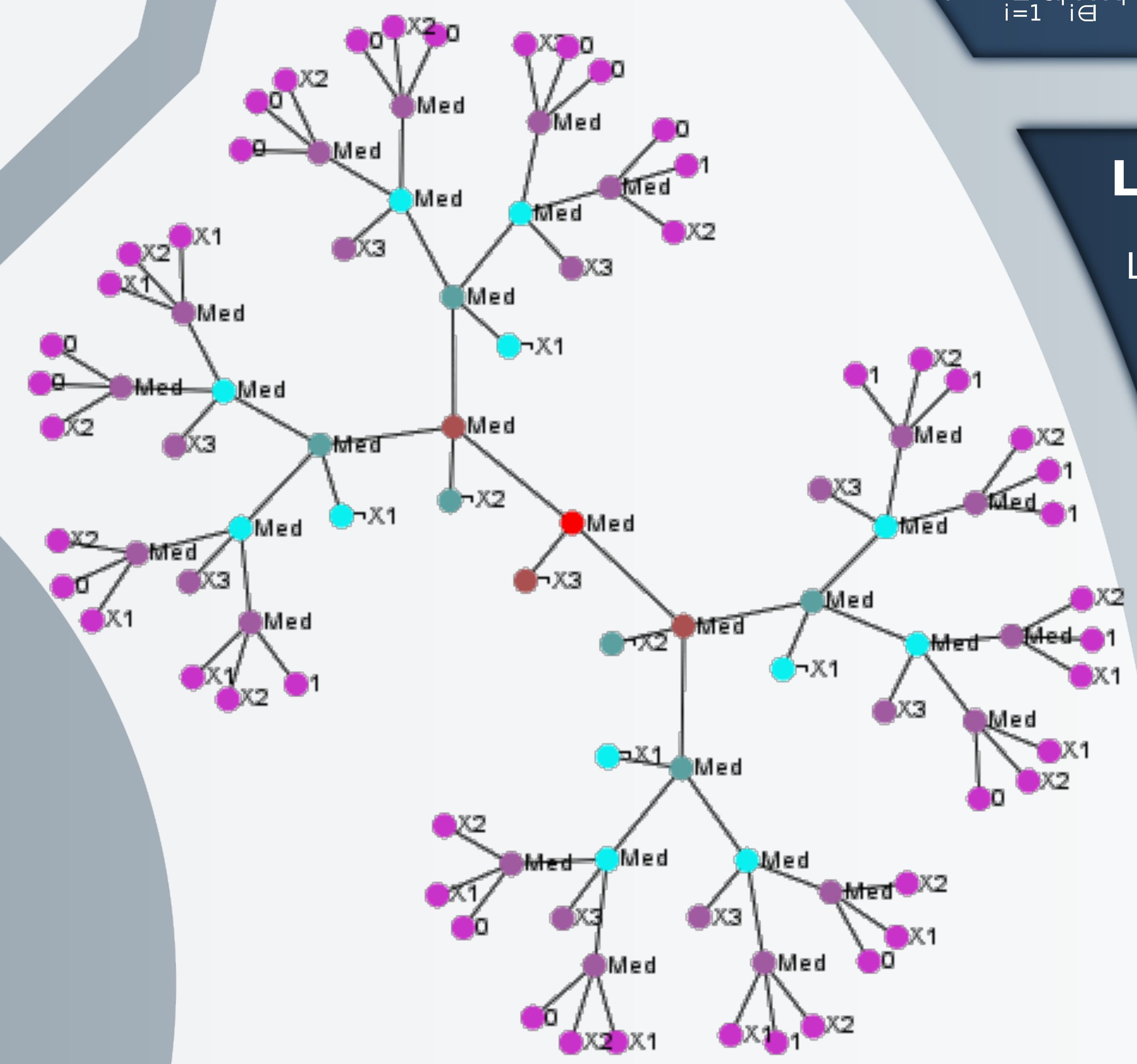


Ce programme permet la traduction d'une table de vérité en une expression booléenne sous Forme Normale.

Il offre également la possibilité de traduire les différentes Formes Normales entre elles.



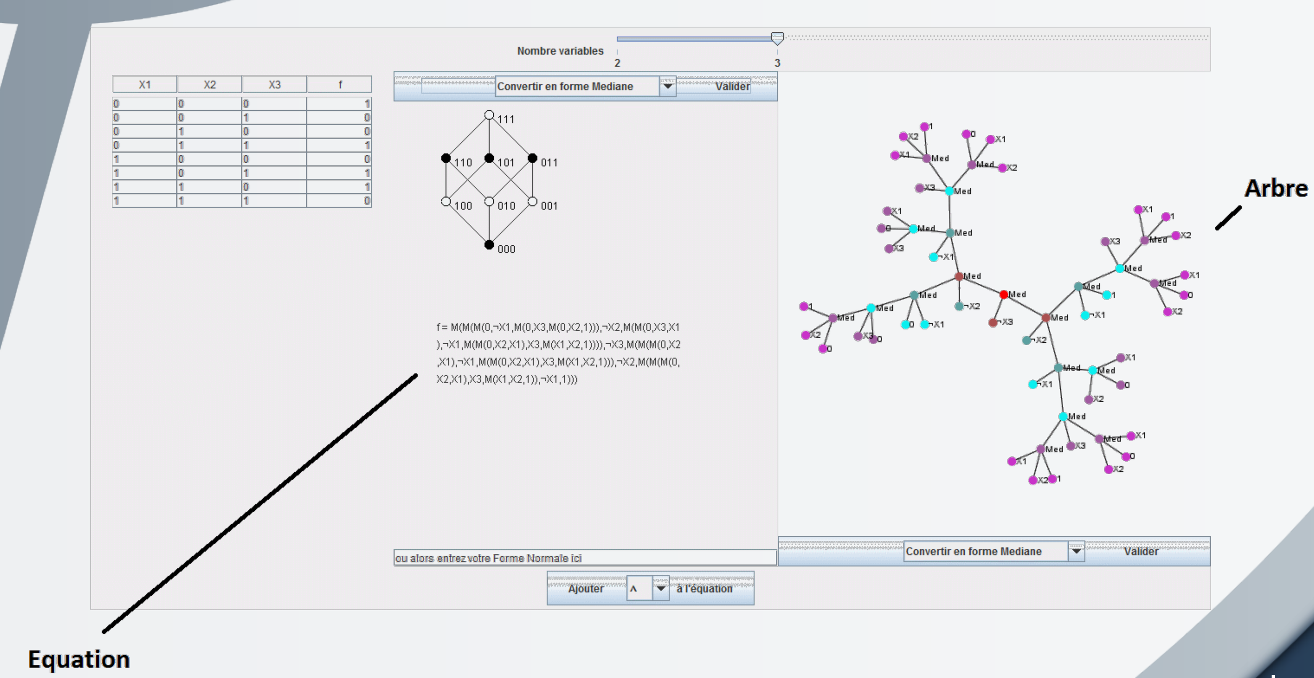
Visualisation en Arbre :



Les applications de ce type de programme peuvent être trouvées dans le domaine de la recherche afin de :

- générer un grand nombre de Formes Normales
- rechercher des identités remarquables concernant les Formes Normales
- rechercher et éprouver une Forme Normale Médiane Optimale

Affichage du résultat :



Les Formes Normales

Le nombre de représentations d'une même expression étant infinie, il est important d'utiliser des formes permettant de les différencier et de les étudier.

DNF (Disjunctive Normal Form)

$$f = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{i \in I_i} l_i \right)$$

avec $l_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

Exemple sous DNF

$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

CNF (Conjonctive Normal Form)

$$f = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{i \in I_i} l_i \right)$$

avec $l_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

Exemple sous CNF

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$

Polynomiale (Zhegalkin polynomials)

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{i \in I} x_i + cst$$

Exemple sous la forme Polynomiale

$g(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 0$

La Forme Normale Médiane

La forme normale médiane (MNF) ne comprend que l'operateur médiane, la negation et des constantes (0 et 1).

Conversion pour une f monotone :

Algorithm MMNF

```
1:  if n ≥ 2 then
2:      α ← (MMNF(f(x_1, ..., x_{n-1}, 0))
3:      β ← (MMNF(f(x_1, ..., x_{n-1}, 1))
4:      return μ α x_n β
5:  else
6:      if f = 0 then
7:          return 0
8:      else
9:          if f = 1 then
10:             return 1
11:         else
12:             return x_1
```

Si f n'est pas monotone, on construit g(f) monotone, g recouvrant f, avant d'utiliser le poids de Hamming w :

$$g(f) = a \begin{cases} 0 & \text{si } w(a) < n \\ 1 & \text{si } w(a) > n \\ f(b) & \text{si } b = \bar{c} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Algorithme GenMNF

```
1: if f est monotone then
2:     return MMNF(f)
3: else
4:     Construire g_f
5:     w ← MMNF(G_f)
6:     for i = 1 à n do
7:         Remplacer chaque occurrence de x_{n+i} dans α par x̄_i
8:
9:     return w
```

Notions de Complexité

Enjeu majeur en algorithmie et en mathématique la notion de complexité d'une fonction booléenne peut être définie par le nombre d'opérateurs et de variables nécessaires pour représenter une expression.

Ainsi l'étude des différentes Formes Normales devient capitale lorsqu'il sagit de rechercher une forme optimale pour exprimmer une fonction booléenne.

Exemple : Formes Normales et complexités

MNF : med(x, y, z)	4
CNF : $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$	11
DNF : $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$	11
PNF : $(x \wedge y) + (x \wedge z) + (y \wedge z) + (x \wedge y \wedge z)$	17

La MNF possède une complexité asymptotiquement moins élevée que les autres Formes Normales.